9Д

УДК 519.816

В.И. Дубровин, Н.А. Миронова
Запорожский национальный технический университет, Украина

Метод получения вектора приоритетов из нечетких матриц попарных сравнений

Рассмотрены методы получения весов и оценки согласованности нечетких матриц попарных сравнений. Предложен метод получения вектора приоритетов из нечетких матриц попарных сравнений на основе эволюционного алгоритма.

Введение

При принятии управленческих решений и прогнозировании возможных результатов лицо, принимающее решение (ЛПР), обычно сталкивается со сложной системой взаимозависимых компонент (ресурсы, желаемые исходы или цели), которую нужно проанализировать. Классический метод анализа иерархии (МАИ), предложенный Т.Л. Саати [1], сводит исследование сложных систем к последовательности попарных сравнений их отдельных составляющих. Один из наиболее существенных недостатков классического МАИ – возможность обработки лишь точечных экспертных оценок, что в большинстве случаев неприемлемо при решении практических задач, которые характеризуются наличием концептуальной неопределенности и многофакторных рисков [2].

Неточность в оценках экспертов и связанные с ней риски можно выразить следующими способами: 1) с помощью точечных оценок и функции распределения вероятности; 2) с помощью интервальных оценок без распределения вероятностей. Вероятностное представление точечных оценок и функций распределения обеспечивает создание нескольких модификаций МАИ, названных стохастическими МАИ. Второй способ представления неточности оценок ЛПР приводит к необходимости применения интервальных и нечетких методов нахождения весов и, следовательно, к разработке модифицированных МАИ на основе нечетких экспертных оценок.

Модифицированный МАИ на основе нечетких экспертных оценок представляет собой синтез классического МАИ и методов нечетких множеств. Субъективные и качественные знания ЛПР можно формализовать при привлечении аппарата теории нечетких множеств. Поэтому предлагается представлять суждения ЛПР в виде нечетких треугольных или трапециевидных чисел, поскольку существует большое количество методов сравнения и ранжирования нечетких чисел [2], [3].

Модифицированный МАИ на основе нечетких экспертных оценок отличается от классического МАИ способом формирования нечетких матриц попарных сравнений (МПС) и методом получения вектора приоритетов.

Целью данной работы является разработка метода получения вектора приоритетов из нечетких МПС, результатом которого будут точечные веса, а также определение меры согласованности нечетких МПС, позволяющая оценить согласованность экспертных суждений, представленных в виде нечетких оценок.

Постановка задачи

Пусть ЛПР оценивает значимость одного элемента иерархии по отношению к другому треугольным $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3)$ или трапециевидным нечетким числом $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, a_{ij}^4)$. Отметим, что $a_{ij}^1 < a_{ij}^2 < a_{ij}^3$ и $a_{ij}^1 < a_{ij}^2 < a_{ij}^3 < a_{ij}^4$. Тогда нечеткая МПС $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}$ выглядит следующим образом

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \ldots \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & 1 & \ldots \tilde{a}_{2n} \\ & & \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{a}_{ji} = 1/\tilde{a}_{ij} = (1/a_{ij}^3, 1/a_{ij}^2, 1/a_{ij}^1)$ для треугольного нечеткого числа и $\tilde{a}_{ji} = 1/\tilde{a}_{ij} = (1/a_{ij}^4,$ $1/a_{ij}^3, 1/a_{ij}^2, 1/a_{ij}^1)$ в случае трапециевидного нечеткого числа.

Следовательно, нечеткую МПС $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}$ можно заполнить $n(n-1)/2$ количеством нечетких чисел в верхнем треугольнике матрицы. Тогда задача получения вектора приоритетов из нечеткой МПС состоит в следующем:

$$W = FPO(\tilde{A}),$$

где $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ – вектор весов, который отображает предпочтения ЛПР, записанные в нечеткой МПС $\tilde{A}$, основное свойство которого $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$;

FPO – метод получения весов из нечеткой МПС;

$\xi(\tilde{A})$ – величина, определяющая степень согласованности нечетких МПС (согласованности экспертных суждений, представленных в виде нечетких оценок).

Отметим, что необходимо найти такие значения весов w_i, которые удовлетворяют следующему условию $\tilde{a}_{ij} \approx w_i / w_j$.

Методы получения вектора приоритетов из нечетких МПС

Методы получения весов или вектора приоритетов из нечетких МПС можно классифицировать по следующим критериям [2]:

– методы, которые позволяют получать веса как из согласованных, так и несогласованных нечетких МПС, а также методы, которые работают лишь с согласованными нечеткими МПС или не гарантируют получения решения в случае несогласованных нечетких МПС;

– методы, результатом которых есть точечные веса, и методы, результатом которых служат интервальные веса.

Рассмотрим методы, позволяющие получать нечеткие веса из согласованных и несогласованных нечетких МПС, результатом которых являются точечные веса.

Метод, предложенный в работе Чанга [4], позволяет получать веса из нечеткой МПС (представленной треугольными нечеткими числами) и использует способ сравнения нечетких чисел, хорошо формализованный в работе [2]. Результатом метода Чанга является вектор приоритетов, имеющий точечную величину. К существенным

недостаткам метода можно отнести то, что компоненты вектора приоритетов могут иметь нулевые значения, которые являются результатом бесконечного значения относительной важности. Отметим также, что данный подход не позволяет оценивать несогласованность нечетких МПС.

Следующий подход получения вектора приоритетов состоит в том, что элементы нечеткой МПС необходимо дефаззифицировать. Вычисление вектора приоритетов производится на основании главного собственного вектора дефаззифицированной МПС, используя приближенные методы получения вектора приоритетов. Дефаззификацию элементов МПС можно осуществлять следующими способами:

– замена нечеткого числа $\widetilde{a}_{ij}$ четким представлением a_{ij}, используя метод центра тяжести и предположение о равномерном или пропорциональном распределении нечетких чисел [5-7];

– вычисление расстояния Хемминга (или Евклида) между нечеткими числами, которое используем как четкое интервальное представление нечеткого числа $\widetilde{a}_{ij}$ [2], [8], [9].

Недостатками данного подхода являются трудоемкие вычисления расстояний между нечеткими числами, а также вывод результатов по методу центра тяжести. Отметим также, что данный подход не позволяет оценивать несогласованность нечетких МПС.

Рассмотрим методы, позволяющие получать веса из нечетких МПС, результатом которых являются интервальные нечеткие веса.

Можно выделить следующие методы получения нечетких весов на основе нечеткого метода наименьших квадратов: традиционный [10], логарифмический [11] и модифицированный логарифмический способы [12]. Решение вышеприведенных методов сводится к постановке задач линейного программирования, результатом которых является вектор интервальных нечетких весов. Данные методы имеют следующие недостатки: можно получить множество решений и отсутствует явная оценка несогласованности нечетких МПС. Для устранения вышеперечисленных недостатков методов получения нечетких весов были предложены два подхода [13]: метод нечеткого программирования предпочтений (МНПП) и модифицированный МНПП.

МНПП использует способ дефаззификации нечетких чисел, известный как α-срез, который позволяет перейти от нечетких суждений к их интервальной аппроксимации соответствующими уровнями α-срезов, а затем к нахождению множества интервальных весов уровней α-срезов. Метод не предусматривает способов оценки согласованности нечетких МПС. Отметим, что использование уровней α-срезов требует больших вычислительных затрат.

Модифицированный МНПП формулируется как задача нелинейного программирования, оптимальное решение которой и является вектором приоритетов. В данном методе предложена оценка степени достоверности λ^* (оптимальное значение целевой функции), которая является показателем согласованности нечетких МПС. Следует отметить, что λ^* может быть как положительной, так и отрицательной величиной, а также λ^* не имеет условий ограничений, что не позволяет использовать ее как оценку согласованности нечетких МПС.

Улучшением метода получения вектора приоритетов на основе модифицированного МНПП является метод получения нечетких весов [2] из нечеткой МПС, базирующийся на интервальной аппроксимации нечеткой МПС, – сводится в общем случае к решению задач нелинейного программирования. Метод нахождения весов моделирует слабое сохранение рангов (преобладание по элементам) и сильное (преобладание по строкам). В качестве оценки согласованности нечетких МПС предложено использовать оптимальное значение целевой функции нахождения наименьших значений отклонений δ^*, которые имеют соответствующие условия ограничений, связанные с постановкой

задачи получения весов из нечетких МПС. Следует отметить, что недостатками данного метода является решение одной или нескольких задач нелинейного программирования традиционными способами.

Вышеперечисленные методы в основном предназначены для вывода приоритетов из нечетких МПС, в которых результаты сравнений представляются в виде нечетких треугольных чисел.

Метод получения векторов приоритетов на основе генетического алгоритма

Предлагается метод получения вектора приоритетов на основе генетического алгоритма [14], который устраняет вышеперечисленные недостатки методов получения весов из нечетких МПС. Введем функцию $F(W)$ для представления соответствующего решения W:

$$F(W) = \min \mu_{ij}\left(\frac{w_i}{w_j}\right), \tag{1}$$

где

$$\mu_{ij}\left(\frac{w_i}{w_j}\right) = \begin{cases} \dfrac{w_i / w_j - a_{ij}^1}{a_{ij}^2 - a_{ij}^1}, \; \textit{если} \; (w_i / w_j) \le a_{ij}^2, \\ 1, \qquad \textit{если} \; a_{ij}^2 < (w_i / w_j) < a_{ij}^3, \\ \dfrac{a_{ij}^4 - w_i / w_j}{a_{ij}^4 - a_{ij}^3}, \; \textit{если} \; (w_i / w_j) \ge a_{ij}^3. \end{cases} \tag{2}$$

Частным случаем трапециевидных чисел являются треугольные числа в случае $a_{ij}^2 = a_{ij}^3$, тогда выражение (2) принимает следующий вид:

$$\mu_{ij}\left(\frac{w_i}{w_j}\right) = \begin{cases} \dfrac{w_i / w_j - a_{ij}^1}{a_{ij}^2 - a_{ij}^1}, \; \textit{если} \; (w_i / w_j) \le a_{ij}^2, \\ \dfrac{a_{ij}^3 - w_i / w_j}{a_{ij}^3 - a_{ij}^2}, \; \textit{если} \; (w_i / w_j) > a_{ij}^2. \end{cases} \tag{3}$$

Следовательно, задача получения вектора приоритетов из нечетких МПС формулируется в виде следующей задачи оптимизации: необходимо найти максимум нелинейной функции $F(W)$ при условии $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, где $F(W)$ определяется выражениями (1) – (3). Для решения задачи оптимизации применим метод эволюционного поиска – генетический алгоритм (ГА).

При использовании ГА для получения весов из нечетких МПС необходимо определить способ представления вектора приоритетов W в хромосоме и функцию соответствия (fitness function) для оценивания хромосом. Одним из простых и эффективных методов кодирования информации является прямое кодирование.

Хромосома при прямом кодировании представляется битовой строкой (рис. 1). При этом для обеспечения требуемой точности (три знака после запятой), длина хромосомы равна $8n$ (количество генов в хромосоме).

Инициализация (первоначальное заполнение) хромосомы происходит по такому способу:

Шаг 1. Построить хромосому длиной $8n$ и заполнить ее случайными двоичными числами.

Шаг 2. Преобразовать двоичные числа в десятичные (8 бит отводится на значение компоненты вектора приоритетов).

Шаг 3. Нормализовать полученные числа, которые представляют собой одно из возможных решений W.

0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
w_1								w_i							

Рисунок 1 – Способ представления вектора приоритетов W в хромосоме

Хромосома оценивается с использованием некоторой меры соответствия, которую называют функцией соответствия. Для нашей задачи функция оценивания хромосом $F(W_k)$ вычисляется по выражениям (1) – (3). Наихудшей хромосомой считается хромосома, у которой наименьшее значение функции соответствия $F(W_k)$. Наилучшей хромосомой считается хромосома, у которой наибольшее значение функции соответствия $F(W_k)$.

Метод получения векторов приоритетов из нечетких МПС на основе генетического алгоритма выглядит следующим образом:

Шаг 1. Задать: N – количество хромосом в популяции; R – количество итераций; значения вероятностей скрещивания pc и мутации pm.

Шаг 2. Установить счетчик итераций: $r = 1$.

Шаг 3. Инициализировать начальную популяцию хромосом W_k, $k = 1,...,N$.

Шаг 4. Вычислить значение функции соответствия $F(W_k)$ для каждой хромосомы W_k.

Шаг 5. Выбрать две наилучшие хромосомы в популяции.

Шаг 6. Сгенерировать случайное число r_1 из интервала [0,1]. Если $r_1 \le pc$, тогда выполнить шаги 7 и 8, иначе перейти к шагу 9.

Шаг 7. Применить оператор скрещивания для двух выбранных хромосом на шаге 5. Предлагается использовать оператор равномерного скрещивания, поскольку он является наиболее подходящим для решения данной задачи. Сформировать две новых хромосомы – новое поколение.

Шаг 8. Сгенерировать случайное число r_2 из интервала [0,1]. Если $r_2 \le pm$, тогда применяют оператор простой мутации для первого гена в одном из родителей, иначе берут следующий ген. Выполнить данный шаг для всех генов двух дочерних хромосом. Осуществить перекодирование хромосом и вычислить значение функции соответствия $F(W_k)$. Перейти к шагу 10.

Шаг 9. Заменить две наихудшие хромосомы двумя выбранными хромосомами на шаге 5.

Шаг 10. Получена новая популяция хромосом. Перейти к шагу 5 для дальнейшего отбора.

Шаг 11. Если $r = R$, переход к шагу 13.

Шаг 12. Установить $r = r + 1$.

Шаг 13. Оценить хромосомы, выбрать наилучшую хромосому. Вектор приоритетов, соответствующий данной хромосоме, принимается как решение.

Шаг 14. Остановка.

В предложенном методе оценка индекса согласованности CI^* нечетких МПС выполняется следующим образом:

$$CI^* = 1 - F^*(W_k),$$

где $F^*(W_k)$ – значение функции соответствия, полученное на шаге 13.

Отношение согласованности CR нечетких МПС вычисляется по следующей формуле:

$$CR = \frac{CI^*}{M(CI^*)},$$

где $M(CI)$ – математическое ожидание CI^* случайным образом составленной МПС в фундаментальной шкале, значение которого приведено в [1].

Результаты моделирования

Рассмотрим нечеткую матрицу попарных сравнений $\widetilde{A}$, которая приведена в публикации [13].

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & (2,3,4) & (1,2,3) \\ (1/4;1/3;1/2) & (1,1,1) & (1/3,1/2,1) \\ (1/3;1/2;1) & (1,2,3) & (1,1,1) \end{pmatrix}$$

Найдем векторы приоритетов и величину отношения согласованности следующих матриц, используя методы: метод Чанга, модифицированный МНПП, улучшение модифицированного МНПП и предложенный в статье – и занесем результаты в табл. 1. Сравним полученные результаты с опубликованными ранее результатами.

Таблица 1 – Величины весов, полученные различными методами

Объект	Вектор приоритетов			
	Метод Чанга	Модифицированный МНПП	Улучшение модифицированного МНПП	Метод, предложенный в статье
w_1	0,565	0,538	[0,453;0,578]	0,537
w_2	0,079	0,170	[0,156;0,184]	0,165
w_3	0,356	0,292	[0,257;0,325]	0,298
$\xi(\widetilde{A})$	–	$\lambda = 0,838$	$\delta^* = 0,06$	$F^*(W_k) = 0,840$
CI	–	–	–	0,16
CR	–	–	0,06	0,061

Таким образом, для рассмотренной нечеткой МПС результаты, полученные с помощью предложенного метода, согласовываются с результатами, представленными в литературе.

Выводы

Научная новизна работы заключается в том, что получил дальнейшее развитие модифицированный метод анализа иерархий на основе нечетких экспертных оценок: предложен метод получения весов и оценки согласованности из нечетких матриц попарных сравнений на основе эволюционного подхода.

Преимущество предложенного метода получения весов состоит в следующем:

– позволяет получать веса для нечетких матриц попарных сравнений, представленных как нечеткими треугольными числами, так и трапециевидными;

– для оценивания согласованности нечетких суждений экспертов была предложена мера согласованности, использующая значение функции соответствия наилучшей хромосомы;
– нет необходимости выполнять интервальную аппроксимацию нечетких матриц попарных сравнений, что позволяет уменьшить временные и вычислительные затраты обработки нечетких экспертных оценок.

Практическая ценность результатов работы состоит в следующем:
– осуществлена программная реализация предложенных и существующих методов получения весов из нечетких матриц попарных сравнений, позволяющая провести сравнение методов;
– рассмотрен пример нечетких матриц попарных сравнений, который анализируется в публикации.

Литература

1. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Саати Т.Л. – М. : Радио и связь, 1993. – 320 с.
2. Недашковская Н.И. Методология обработки нечеткой экспертной информации в задачах предвидения. Ч. 1 / Н.И. Недашковская, Н.Д. Панкратова // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 2. – С. 40-55.
3. Ахрамейко А.А. Обобщение метода анализа иерархий Саати для использования нечетко-интервальных экспертных данных [Электронный ресурс] / А.А. Ахрамейко, Б.А. Железко, Д.В. Ксеневич, С.В. Ксеневич. – Режим доступа : http://sedok.narod.ru /s_files/belorussia_2002.htm
4. Chang D.Y. Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP / D.Y. Chang // European Journal of Operational Research. – 1996. – Vol. 95. – № 3. – P. 649-655.
5. Prabjot K. A fuzzy ANP-based approach for selection ERP vendors / K. Prabjot, N.C. Mahanti // International Journal of Soft Computing. – 2008. – № 3(1). – P. 24-32.
6. Cheng R.W. A fuzzy ANP-based approach to Evaluate Medical Organizational Performance / R.W. Cheng, Che-Wei Chang, Hung-Lung Lin // International and Management Sciences. – 2008. – Vol. 19. – № 1. – P. 53-74.
7. Liao S.H. Evaluating anti-armor weapon using rankin fuzzy numbers / S.H. Liao, K.C. Lu, C.H. Cheng // Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – Vol. 16. – № 2. – P. 241-257.
8. Xinfan W. Fuzzy Number Intuitionistic Fuzzy Arithmetic Aggregation Operators / W. Xinfan // International Journal of Fuzzy Systems. – 2008. – Vol. 10. – № 2. – P. 92-103.
9. Ting-Yu Chen. Importance-Assessing Method with Fuzzy Number-Valued Fuzzy Measures and Discussions on TFNs And TrFNs / Ting-Yu Chen, Tai-Chun Ku // International Journal of Fuzzy Systems. – 2008. – Vol. 10. – № 2. – P. 104-111.
10. Ruoning Xu. Fuzzy least-squares priority method in the analytic hierarchy process / Ruoning Xu // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – № 3(112). – P. 395-404.
11. Ruoning Xu. Fuzzy logarithmic least squares ranking method in analytic hierarchy process / Ruoning Xu, Zhai Xiaoyan // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – № 2(77). – P. 175-190.
12. Ying-Ming Wang. A modified fuzzy logarithmic least squares method for fuzzy analytic hierarchy process / Ying-Ming Wang, M.S. Taha Elhag, Zhongsheng Hua // Fuzzy Sets and Systems. – 2006. – № 23(157). – P. 3055-3071.
13. Mikhailov L. Evaluation of services using a fuzzy Analityc Hierarchy Process / L. Mikhailov, P. Tsvetinov // Applied Soft Computing. – 2004. – № 5. – P. 23-33.
14. Ahmed Farouk Abdul Moneim. Fuzzy genetic prioritization in multi-criteria decision problems / Ahmed Farouk Abdul Moneim // Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering. – 2008. – Vol. 2. – № 4. – P. 175-182.
15. Недашковская Н.И. Методология обработки нечеткой экспертной информации в задачах предвидения. Ч. 2 / Н.И. Недашковская, Н.Д. Панкратова // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 3. – С. 49-63.

В.І. Дубровін, Н.О. Миронова

Метод отримання вектора пріоритетів з нечітких матриць попарних порівнянь

Розглянуті методи отримання ваг та оцінки узгодженості нечітких матриць попарних порівнянь. Запропонований метод отримання вектора пріоритетів з нечітких матриць попарних порівнянь на базі еволюційного алгоритму.

V.I. Dubrovin, N.A. Mironova

The Method of Derivation of Priority Vector from Fuzzy Pairwise Matrix

The methods of derivation weights and consistency ratio of fuzzy pairwise matrix are considered. The of method derivation priority vector from fuzzy pairwise matrix based on evolutionary algorithm is proposed.

Статья поступила в редакцию 09.06.2009.